管理类联考数学：排列组合常考模型

1. 相邻问题捆绑法

先将相邻元素“捆绑”，看成一个元素与其他元素排列，再将这些相邻元素“松绑”，自身进行排列。

例：甲、乙等 10 名同学排一列，甲、乙必相邻，共有（　　）种排法。

A. $2!9!$　　B. $8!2!$　　C. $7!2!$　　D. $10!$　　E. $3!7!$

【解析】A。先将甲、乙“捆绑”，看成一个人与其余 8 个人进行排列，也就是 9 个人全排列，有 $9!$种不同的排法。再将甲、乙“松绑”，自身进行排列，有 $2!$种不同排法。故总计有 $2!9!$种不同排法。

2. 不相邻问题插空法

先不考虑不能相邻的元素，把其余元素做全排列，再将不能相邻的元素插入已经排好的元素间和两端的空隙中。

例：甲、乙等 10 名同学排一列，甲、乙必不相邻，共有（　　）种排法。

A. $10!$　B. $2!9!$　C. $72\times 8!$　D. $56\times 8!$　E. $64\times 8!$

【解析】C。先不考虑甲、乙，将其余 8 人全排列，共 $8!$种排法，8 个人形成了 9 个空隙（包括两端），将甲、乙插入 9 个空位共有：$9\times 8=72$（种）插法，故总计 $72\times 8!$种不同的排法。

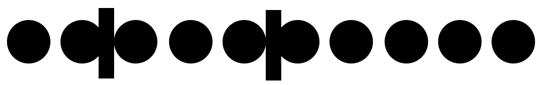
3. 相同元素分配挡板法

将相同元素分给不同对象，先将元素一字排开，再从空格中选出需要的个数插入挡板，将元素分成若干份，可使每个对象至少分得一个元素。

例：10 瓶相同饮料分给 3 个人，每人至少 1 瓶，则有（　　）种分法。

A. 72　B. 36　C. 55　D. 56　E. 80

【解析】C。将 10 瓶饮料一字排开，形成 9 个空格（不包括两端）。要把饮料分成 3 段，从 9 个空格中选 2 个插入挡板即可。共有：$C_9^2=36$（种）。



4. 环形排列问题

有 n 个不同元素做环形排列，共有$(n-1)!$种排法。如果从 n 个不同元素中选取 m 个元素做环形排列，则共有$\frac{P_n^m}{m}$种排法。如 16 个人围桌而坐，共有$(16-1)!=15!$（种）不同坐法。

5. 平均分堆问题

平均分堆时，出现数量相同的堆，有几堆则除以几的阶乘。若指定了接收对象，则先分堆，再排序。

例：有六本不同的书，则共有 15 种分法。

（1）平均分为三堆。　　（2）平均分配给甲、乙、丙三人。

【解析】A。条件一：$\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{3!}=15$（种）；条件二：$\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{P_3^3}P_3^3=90$（种）。

6. 不同元素打包分配法（分堆分配问题）

打包法是不同元素分组时，先将元素个数做正整数分解，再计算每种分解法对应的不同分组情况，最后汇总相加。分配法是将 n 个不同元素分到 n 个不同位置，每个位置恰好 1 个元素。

例：6 名老师分到 3 个班，每班至少 1 名老师，则有（　　）种分法。

A. 90　B. 540　C. 360　D. 450　E. 500

【解析】B。首先 $6=1+1+4=1+2+3=2+2+2$ 共三种分解方法。其次，计算每种分解对应的分组方法数：$1+1+4$ 类型共有：$\frac{C_6^1C_5^1C_4^4}{P_2^2}=15$，$1+2+3$ 类型共有：$C_6^1C_5^2C_3^3=60$，$2+2+2$ 类型共有：$\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{P_3^3}=15$，第一步打包：共 $15+60+15=90$（种）方法。第二步分配，3 组元素分到 3 个位置，共计 $3!$种方法，因而总计：$90\times3!=540$（种）

7. 数字排序问题

此类问题涉及奇偶、整除、数位大小等，可采用元素位置法进行分析，注意 0 不能放在首位。

例：0~9 共 10 个数字，能组成（　　）个不同的三位偶数。

A. 328　B. 256　C. 720　D. 320　E. 410

【解析】A。0 排在末位时，共有$P_9^2=72$（个）。0 不排在末位时，共有$P_4^1P_8^1P_8^1=256$（个），所以总计为 $72+256=328$（个）。

8. 分房问题——允许重复排列

此类问题应区分可重复排列元素“人”和不可重复排列元素“房”进行分析。将 n 个人等可能地分到 m 个房间中去，共有m^n种方法。

例：四封信放入三个邮箱，则不同的放信方法共有（　　）种。

A. 3^3　B. 3^4　C. 4^3　D. 4^4　E. $3^2\times 4^2$

【解析】B。每封信都有选择权，可以选三个邮箱中的任意一个，也就是每封信都有 3 种选法。四封信就有$3\times 3\times 3\times 3=3^4$种。

9. 约束条件排列问题

对有约束元素的排列问题，应按元素的性质进行分类，特殊元素或特殊位置的问题，采用特殊优先安排的策略。

例：从 10 个不同的文艺节目中选 6 个编为一个节目单，如果某女演员的独唱节目一定不能排在第二个节目的位置上，则共有（　　）种不同的排法。

A. P_{10}^6　B. P_{10}^5　C. $6P_9^5+P_9^6$　D. $P_9^1P_9^5$　E. $P_{10}^1P_9^5$

【解析】D。方法一：第二个节目共有$P_9^1=9$（种）排法，其他节目共有P_9^5种排法，所以总计有：$P_9^1P_9^5$种排法。

方法二：若选中该女演员上场，则她共有 5 个出场位置可选，而其他节目有P_9^5种可能的排列；若该女演员不上场则有P_9^6种可能。所以共有：$5P_9^5+P_9^6=P_9^1P_9^5$（种）。

方法三：从总可能数（10 中选 6 做排列）中减去把该女演员恰好排在第二个节目的可能数，即为所求，$P_{10}^6-P_9^5=P_9^1P_9^5$（种）。

10. 错排问题

该问题也称不对号入座问题，即编号 1，2，…，n 的不同元素，放入编号 1，2，…n 的不同盒子中，要求元素编号与盒子编号不同，就叫作不对号。记忆方法：元素对号入座只有 1 种方法，不对号入座时：

（1）恰有 2 个元素不对号有 1 种方法；

（2）恰有 3 个元素不对号有 2 种方法；

（3）恰有 4 个元素不对号有 9 种方法；

（4）恰有 5 个元素不对号有 44 种方法；

例：4 个教师监考他们所教的 4 个班级，要求每个教师不能监考自己教的班，则共有（　　）种监考方案。

A. 4　　B. 5　　C. 7　　D. 9　　E. 13

【解析】D。

11. 局部有序排列问题

对某几个元素顺序确定的排列，可先把这几个元素与其他元素一起排列，再用总排列数除以这几个元素的全排列数。这其实就是用除法来消序。

例：7 人排队，其中甲、乙、丙、丁 4 人顺序一定，则共有（　　）种排法。

A. 210　　B. 215　　C. 220　　D. 225　　E. 230

【解析】A。方法一：利用公式：$\frac{P_7^7}{P_4^4}=7\times6\times5=210$（种）。方法二：不考虑甲、乙、丙、丁，7 个位置三个人坐，共有$P_7^3=210$（种），剩下的 4 个空位，甲乙丙丁只能按序就座，仅 1 种坐法，所以总计 210 种坐法。

12. 正难则反问题

对于没有、全部、至多、至少等问题，往往考虑对立事件。先求出总可能数，再减去不符合条件的可能数。

例：0~9 共 10 个数，从中取出 3 个数求和，则和为不小于 10 的偶数的取法共有（　　）种。

A. 49　　B. 50　　C. 51　　D. 52　　E. 53

【解析】C。三个数为偶数，只有两种可能：一是三个数全是偶数，二是一偶搭配两个奇数。从 10 中取出 3 个偶数，有$C_5^3=10$（种），从 10 中取出 1 偶 2 奇，有$C_5^1C_5^2=50$（种）。题干还要求和不小于 10，可先计算它的反面，和小于 10 的偶数，利用穷举法可知共有 9 种可能，因此符合条件的取法有：$10+50-9=51$（种）。

13. 分排排列问题

n 个元素排成前后若干排，若无特殊要求，可按一排处理。

例：两排座位，第一排 3 个座位，第二排 5 个座位，若 8 个学生坐，每人 1 个座位，则有（　　）种不同坐法。

A. $P_3^3P_5^5$　　B. $P_8^3P_8^5$　　C. P_8^8　　D. $P_3^3+P_5^5$　　E. $P_8^3+P_8^5$

【解析】C。8 名学生可在前后两排任意入座，再无其他条件，所以两排座位可看作一排来处理，不同坐法共计P_8^8种。

14. 配对问题

该问题的核心在于是否成双。对不成双问题要先取双，然后从每双中取左右单只即可。

例：10 双不同的鞋子，从中任取 4 只，则全不成双的取法有（　　）种。

A. 210　　B. 840　　C. 1680　　D. 3360　　E. 6720

【解析】D。从 10 双鞋中选 4 双，共C_{10}^4种取法，再从每双鞋中各取 1 只，分别有 2 种取法，所以总计$2^4C_{10}^4=3360$（种）。

15. 摸球问题

例：袋子中装有 5 个白球和 6 个黑球，依次取出 4 个球，则第二次取得白球的取法有 3600 种。

（1）每次取 1 个球，取后不放回。　　（2）每次取 1 个球，取后放回。

【解析】A。条件（1）：若第一次取白球，可能数为：$C_5^1\times C_4^1\times C_9^1\times C_8^1=1440$（种），若第一次取黑球，可能数为：$C_6^1\times C_5^1\times C_9^1\times C_8^1=2160$，因此共有：$1440+2160=3600$（种）。条件（2）：若第一次取白球，可能数为：$C_5^1\times C_5^1\times C_{11}^1\times C_{11}^1$（种），若第一次取黑球，可能数为：$C_6^1\times C_5^1\times C_{11}^1\times C_{11}^1$，因此共有 6655（种）。