

管理类联考数学：算术基础知识 4

比和比例

比和比例的定义与性质

比和比例定义 1: 两个数相除, 又称为是这两个数的比, 即 $a:b = \frac{a}{b} (b \neq 0)$.

比和比例定义 2: 表示两个比相等的式子叫作比例, 记作 $a:b = c:d$ 或 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

比例的基本性质:

性质 1: $a:b = c:d \leftrightarrow ad = bc$.

性质 2: $a:b = c:d \leftrightarrow b:a = d:c \leftrightarrow b:d = a:c \leftrightarrow d:b = c:a$.

【真题剖析】

例: 若实数 a, b, c 满足 $a:6:c = 1:2:5$, 且 $a + b + c = 24$, 则 $a^2 + b^2 + c^2 = ()$.

A.30 B.90 C.120 D.240 E.270

【解析】E. 本题考查的是比和比例问题, 方法一: 利用份数来表示比例, 已知 $a:6:c = 1:2:5$, 则总份数为 8 份, 又已知 $a + b + c = 24$, 总和为 24, 则每一份为: $24 \div 8 = 3$, $a = 3 \times 1 = 3$, $b = 3 \times 2 = 6$, $c = 3 \times 5 = 15$, 则 $a^2 + b^2 + c^2 = 9 + 36 + 225 = 270$. 方法二: 看到比例, 可以设这个比例中的比等于一个常数. 设 $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{5} = k$, 则 $a = k, b = 2k, c = 5k$, 则 $k + 2k + 5k = 24$, 得: $k = 3$, 因此 $a^2 + b^2 + c^2 = 30k^2 = 270$.

重要定理

1. 更比定理: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

2. 反比定理: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

3. 合比定理: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

4. 分比定理: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

5. 合分比定理: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} (a > b, c > d) \leftrightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

6. 等比定理: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f} (b+d+f \neq 0)$

【真题剖析】

例：电影开演时观众中女士与男士人数之比为 5:4，开演后无观众入场，放映一小时后，女士的 20%、男士的 15%离场，则此时在场的女士与男士人数之比为（ ）。

A. 4:5 B. 1:1 C. 5:4 D. 20:17 E. 85:64

【解析】D。本题考查的是比例和分数问题的综合，方法一：注意不确定总人数时，可设为“1”。则开场前的女士有 $\frac{5}{9}$ ，男士有 $\frac{4}{9}$ ，放映一小时后，还剩下的女士人数有： $\frac{5}{9} \times (1 - 20\%)$ ，还剩下的男士人数有： $\frac{4}{9} \times (1 - 15\%)$ ，此时的女士与男士人数之比为： $\frac{5}{9} \times (1 - 20\%) : \frac{4}{9} \times (1 - 15\%) = 20:17$ 。方法二：设比，女士人数为 $5k$ ，男士人数为 $4k$ ，则此时在场的女士与男士人数之比为： $\frac{5k(1-20\%)}{4k(1-15\%)} = \frac{20}{17}$ 。

比和比例的定义与性质

比和比例定义 1：两个数相除，又称为是这两个数的比，即 $a:b = \frac{a}{b} (b \neq 0)$ 。

比和比例定义 2：表示两个比相等的式子叫作比例，记作 $a:b = c:d$ 或 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 。

比例的基本性质：

性质 1： $a:b = c:d \leftrightarrow ad = bc$ 。

性质 2： $a:b = c:d \leftrightarrow b:a = d:c \leftrightarrow b:d = a:c \leftrightarrow d:b = c:a$ 。

【真题剖析】

例：若实数 a, b, c 满足 $a:6:c = 1:2:5$ ，且 $a + b + c = 24$ ，则 $a^2 + b^2 + c^2 = ()$ 。

A. 30 B. 90 C. 120 D. 240 E. 270

【解析】E。本题考查的是比和比例问题，方法一：利用份数来表示比例，已知 $a:6:c = 1:2:5$ ，则总份数为 8 份，又已知 $a + b + c = 24$ ，总和为 24，则每一份为： $24 \div 8 = 3$ ， $a = 3 \times 1 = 3$ ， $b = 3 \times 2 = 6$ ， $c = 3 \times 5 = 15$ ，则 $a^2 + b^2 + c^2 = 9 + 36 + 225 = 270$ 。方法二：看到比例，可以设这个比例中的比等于一个常数。设 $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{5} = k$ ，则 $a = k, b = 2k, c = 5k$ ，则 $k + 2k + 5k = 24$ ，得： $k = 3$ ，因此 $a^2 + b^2 + c^2 = 30k^2 = 270$ 。

重要定理

1. 更比定理: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

2. 反比定理: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

3. 合比定理: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

4. 分比定理: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

5. 合分比定理: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} (a > b, c > d) \leftrightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

6. 等比定理: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f} (b+d+f \neq 0)$

【真题剖析】

例：电影开演时观众中女士与男士人数之比为 5:4，开演后无观众入场，放映一小时后，女士的 20%、男士的 15% 离场，则此时在场的女士与男士人数之比为（ ）。

A. 4:5 B. 1:1 C. 5:4 D. 20:17 E. 85:64

【解析】D。本题考查的是比例和分数问题的综合，方法一：注意不确定总人数时，可设为“1”。则开场前的女士有 $\frac{5}{9}$ ，男士有 $\frac{4}{9}$ ，放映一小时后，还剩下的女士人数有： $\frac{5}{9} \times (1 - 20\%)$ ，还剩下的男士人数有： $\frac{4}{9} \times (1 - 15\%)$ ，此时的女士与男士人数之比为： $\frac{5}{9} \times (1 - 20\%) : \frac{4}{9} \times (1 - 15\%) = 20:17$ 。方法二：设比，女士人数为 $5k$ ，男士人数为 $4k$ ，则此时在场的女士与男士人数之比为： $\frac{5k(1-20\%)}{4k(1-15\%)} = \frac{20}{17}$ 。