管理类联考数学：数列必考精点

数列的定义：

1.按一定次序排列的一列数称为数列。

2.数列中的每个数叫作这个数列的项，第 n 个数称为第 n 项，通常记作a_n，那么数列就可以用$\{a_n\}$来表示。数列的第一项也称为首项。

数列的通项公式：如果数列$\{a_n\}$的第 n 项与 n 之间的关系可以用一个公式表示，那么这个公式就叫作这个数列的通项公式。

【注意】若已知一个数列的通项公式，就可以求出这个数列中的任意一项。

数列的前 n 项和及其与通项的关系：

（1） 数列$\{a_n\}$的前 n 项和记作S_n，则$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$。

（2） $a_n = \begin{cases} S_1 & (n=1) \\ S_n - S_{n-1} & (n \geq 2) \end{cases}$

【注意】利用$a_n = \begin{cases} S_1 & (n=1) \\ S_n - S_{n-1} & (n \geq 2) \end{cases}$求通项时，对 $n = 1$ 的情形要检验，若当 $n = 1$ 时，a_1符合$a_n = S_n - S_{n-1}\ (n \geq 2)$，则数列$\{a_n\}$的通项公式要用一个表达式表示；若当 $n = 1$ 时，a_1不符合$a_n = S_n - S_{n-1}\ (n \geq 2)$时，则$a_n = \begin{cases} a_1 & (n=1) \\ S_n - S_{n-1} & (n \geq 2) \end{cases}$.

求数列通项公式的方法：

1.利用$a_n = \begin{cases} S_1 & (n=1) \\ S_n - S_{n-1} & (n \geq 2) \end{cases}$求通项。

2.由递推公式求数列通项的常用方法：

（1）形如$a_{n+1} = a_n + f(n)$，常用累加法，即利用$a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_n - a_{n-1})(n \geq 2, n \in N^*)$求解。

（2）形如$a_{n+1} = a_n \cdot f(n)$，常用累乘法，即利用$a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}(n \geq 2, n \in N^*)$求解。

（3）形如$a_{n+1} = Aa_n + B$，常用构造等比数列法，变形得：$a_{n+1} + k = A(a_n + k)$ ，则 $k = \frac{B}{A-1}$。

例：（2019.15）设数列$\{a_n\}$满足$a_1 = 0$，$a_{n+1} - 2a_n = 1$，则$a_{100} =$（　　）。

A. $2^{99} - 1$　　B. 2^{99}　　C. $2^{99} + 1$　　D. $2^{100} - 1$　　E. $2^{100} + 1$

【解析】A。本题考查的是数列中求通项公式问题。对于既不是等比数列也不是等差数列，我们需要拼凑出新的数列，使它满足等差或等比数列。本题中的已知条件$a_{n+1} - 2a_n = 1$ 满足$a_{n+1} = Aa_n + B$ 的形式，因而

可以转化为$a_{n+1}+t=p$（$a_n+\mathrm{t}$）的形式，此题可化为$a_{n+1}+1=2$（a_n+1），因而$\{a_n+1\}$是一个等比数列，且首项为 1，公比为 2。则由等比数列的通项公式可知：$a_n+1=2^{n-1}$，因此，$a_{100}=2^{99}-1$。

等差数列的定义：

（1）一般地，如果一个数列从第二项起，每一项与它的前一项的差等于同一个常数，那么这个数列就叫作等差数列。

（2）这个常数叫作等差数列的公差，通常用字母 d 表示，则$a_n-a_{n-1}=d \quad (n\geq 2)$.

通项公式：如果等差数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公差为 d，那么它的通项$a_n=a_1+(n-1)d=nd+a_1-d(n\in N_+)$.

等差中项公式：如果 a，A，b 成等差数列，那么 A 叫作 a 与 b 的等差中项，则 $A=\frac{a+b}{2}$。

前 n 项和公式：$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$.

例：（2019.24）设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，则数列$\{a_n\}$是等差数列。

（1）S_n=n^2+2n，$n=1$，2，3，...

（2）S_n=n^2+2n+1，$n=1$，2，3，...

【解析】A。本题考查的是求数列的通项公式问题。需注意的问题有两点：①首项是否也满足通项公式；②利用$a_n=S_n-S_{n-1}$求通项公式。条件一：S_n=n^2+2n，则$a_1=3$，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+2n-[(n-1)^2+2(n-1)]=2n+1$。验证$a_1=3$ 满足，因此符合条件，独立充分。条件二：S_n=n^2+2n+1，则$a_1=4$，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+2n+1-[(n-1)^2+2(n-1)+1]=2n+1$。验证$a_1=3$ 与$a_1=4$ 矛盾，因此不符合条件。本题还可以采用技巧法，已知等差数列前 n 项和为S_n=$a_1n+\frac{n(n-1)}{2}d$，化为关于 n 的函数为S_n=$\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$，因此等差数列前 n 项和S_n是关于 n 的二次函数，且没有常数项。因此条件一充分，条件二不充分。

等差数列的性质

1. 在等差数列$\{a_n\}$中，对任意 $m,n \in N^*$，$a_n = a_m + (n-m)d$，$d = \frac{a_n - a_m}{n-m}(m \neq n)$.
2. 在等差数列$\{a_n\}$中，$k + l = m + n(k,l,m,n \in N^*)$，则$a_k + a_l = a_m + a_n$.
3. S_n为等差数列的前 n 项和，则S_n，$S_{2n} - S_n$，$S_{3n} - S_{2n}$，…仍为等差数列。
4. S_n最值：在等差数列中，若a_1与 d 的正负号相反，则S_n有最值：

（1） 当$a_1 > 0$，$d < 0$，S_n有最大值；

（2） 当$a_1 < 0$，$d > 0$，S_n有最小值；

5. S_n最值的求法：

（1）若已知 d，则可利用二次函数最值的求法$(n \in N^*)$；

（2）若已知a_1，则求$S_n(n \in N^*)$最值时，可利用$\begin{cases} a_n \geq 0 \\ a_{n+1} \leq 0 \end{cases}$或$\begin{cases} a_n \leq 0 \\ a_{n+1} \geq 0 \end{cases}$确定。

例：（2014.7）已知$\{a_n\}$为等差数列，且$a_2 - a_5 + a_8 = 9$，则$a_1 + a_2 + \dots + a_9 =$（ ）.

A.27 B.45 C. 54 D. 81 E. 162

【解析】D。本题考查的是等差数列的性质，重点是等差数列的性质公式及等差数列求和公式。已知$\{a_n\}$为等差数列，若 $m + n = p + l$，则$a_m + a_n = a_p + a_l$。已知$a_2 - a_5 + a_8 = 9$，又因为$a_2 + a_8 = 2a_5$，所以$a_5 = 9$. 求$S_9 = a_1 + a_2 + \dots + a_9 = \frac{(a_1 + a_9) \times 9}{2}$，$a_1 + a_9 = 2a_5$，因此$S_9 = 9a_5 = 81$.

等比数列的有关概念

等比数列的定义：

（1）一般地，如果一个数列从第二项起，每一项与它的前一项的比等于同一个常数，那么这个数列就叫作等比数列。

（2）这个常数叫作等差数列的公比，通常用字母 q 表示$(q \neq 0)$，则$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q \quad (n \geq 2)$.

【注意】常数 q 和等比数列的项都不能为 0.

通项公式：如果等比数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公比为 q，那么它的通项$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = a_m \cdot q^{n-m}(n,m \in N_+)$.

等比中项公式：如果 a，G，b 成等比数列，那么 G 叫作 a 与 b 的等比中项，则$\frac{G}{a} = \frac{b}{G}$即$G^2 = ab$。

前 n 项和公式：$S_n = \begin{cases} na_1 & (q = 1) \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1 - a_n q}{1-q} & (q \neq 1) \end{cases}$.

【注意】当$\{a_n\}$是等比数列且 $q \neq 1$ 时，$S_n = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} \cdot q^n = A - A \cdot q^n$。

例：甲、乙、丙三人各自拥有不超过 10 本图书，甲丙购入 2 本图书后，他们拥有的图书数量构成等比数列，则能确定甲拥有图书的数量。

(1) 已知乙拥有的图书数量。　　(2) 已知丙拥有的图书数量。

【解析】C。本题考查的是数列问题和充分性问题。首先假设甲、乙、丙原来有 x，y，z 本书，且 x，y，z 都小于等于 10，甲丙购入 2 本图书后为 $x+2$，y，$z+2$，构成等比数列则满足$y^2 = (x+2)(z+2)$，可知要想求出 x，必须要知道 y 和 z。因此条件（1）和（2）单独都不充分，但条件（1）和条件（2）联合起来充分。如 6，6，6 或 3，6，12。

等比数列的性质

1.在等比数列$\{a_n\}$中，对任意 $m,n \in N^*$，$a_n = a_m \cdot q^{n-m}$，$(m \neq n)$.

2.在等比数列$\{a_n\}$中，$k + l = m + n(k,l,m,n \in N^*)$，则$a_k \cdot a_l = a_m \cdot a_n$.

3.S_n为等比数列的前 n 项和，则S_n，$S_{2n} - S_n$，$S_{3n} - S_{2n}$，…仍为等比数列。

例：已知$\{a_n\}$为等比数列，且$a_2 a_5 a_8 = 27$，则$a_1 a_2 \ldots a_9 =$（　）.

A.9　　B.27　　C. 81　　D. 27^2　　E.27^3

【解析】E。本题考查的是等比数列的性质，已知$\{a_n\}$为等比数列，若 $k + l = m + m$，则$a_k \cdot a_l = a_m \cdot a_n$。已知$a_2 a_5 a_8 = 27$，又因为$a_2 a_8 = a_5 a_5$，所以$a_5 = 3$.求$a_1 a_2 \ldots a_9 = (a_5)^9 = 27^3$.